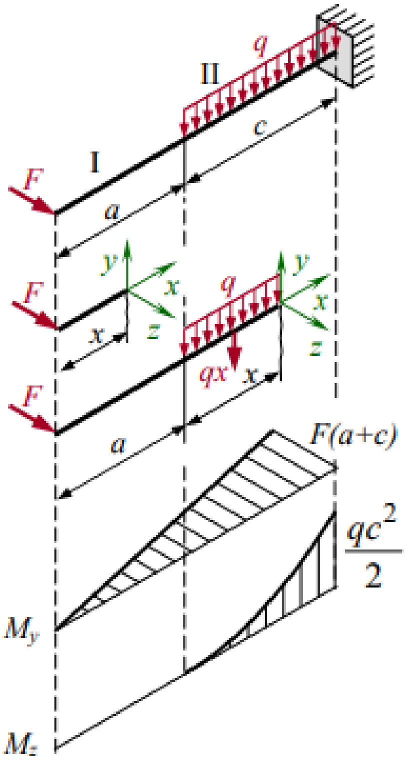
Лекция 10

Сложное сопротивление
Косой изгиб
Изгиб с растяжением
Изгиб с кручением



СЛОЖНОЕ СОПРОТИВЛЕНИЕ

В общем случае нагрузка на брус может быть такой, что в его поперечных сечениях возникает одновременно несколько внутренних усилий.

Комбинацию простых видов сопротивления называют сложным сопротивлением.

Расчеты на прочность и жесткость бруса при сложном сопротивлении основываются обычно на принципе независимости действия сил (суперпозиций), при котором каждый из простых видов сопротивления рассматривают независимо от остальных.

Полные напряжения и деформации, возникающие в упругой системе, определяют путем геометрического сложения напряжений и перемещений, соответствующих простым видам сопротивления.

В зависимости от сочетания внутренних усилий сложное сопротивление условно подразделяют на три вида:

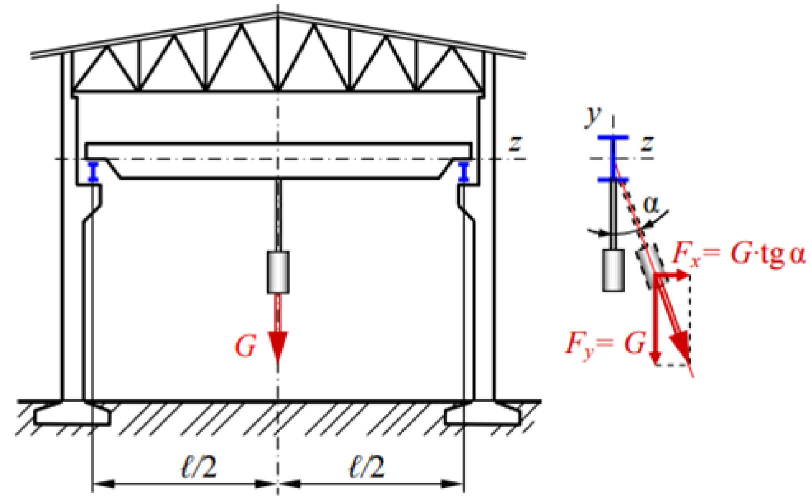
- **косой изгиб;**
- **изгиб с растяжением;**
- **изгиб с кручением.**

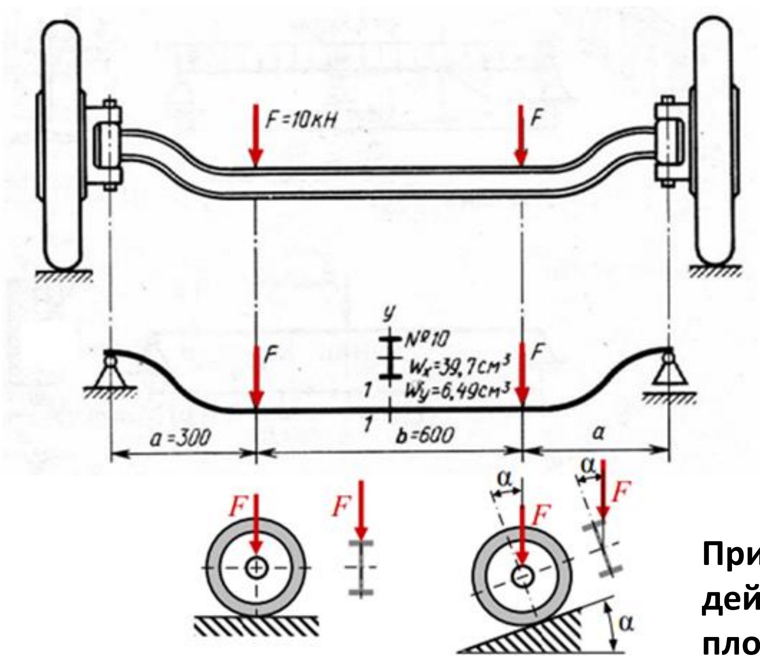
КОСОЙ ИЗГИБ

Косой изгиб – частный случай сложного сопротивления, при котором силовая плоскость не совпадает с главными плоскостями инерции.

Главная плоскость инерции – плоскость, проходящая через геометрическую ось бруса и главную ось инерции

Главные оси инерции - три взаимно перпендикулярные оси, проходящие через центр масс тела





В начале движения мостового крана вдоль пролета цеха, и при его торможении возникает горизонтальная сила вследствие инерции груза

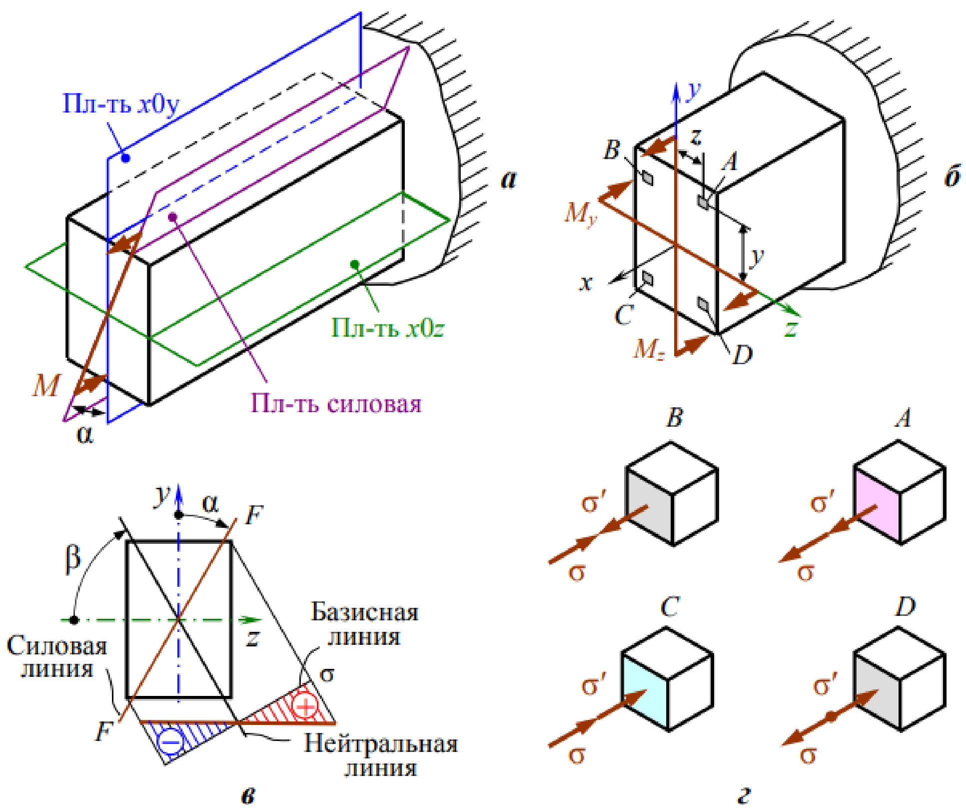
При въезде автомобиля на наклонную плоскость линия действия силы *F* не совпадает ни с одной из главных плоскостей инерции поперечного сечения балки

В общем случае косого изгиба в поперечных сечениях возникают четыре внутренних усилия: две поперечные силы *Qz, Qy* и два изгибающих момента *Mz, My*.

Влиянием поперечных сил на прочность и жесткость при расчете длинных балок часто пренебрегают ввиду их малости и учитывают только изгибающие моменты.

Напряжения при косом изгибе

Изгибающий момент *M* (а) в сечении раскладывают на две его составляющие, действующие в главных плоскостях инерции (б) $M_z = M \cdot \cos\alpha$ и $M_y = M \cdot \sin\alpha$



От каждого из внутренних усилий возникают нормальные напряжения, приложенные к одной паре площадок.

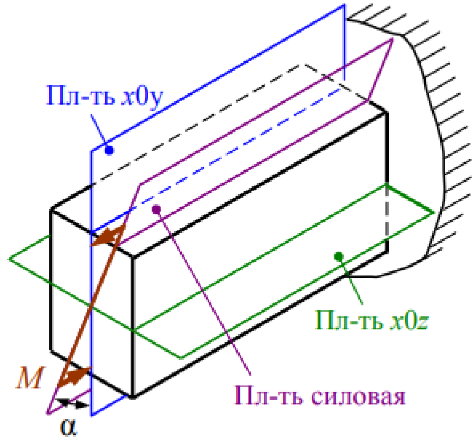
Две другие пары площадок свободны от напряжений.
Имеет место линейное напряженное состояние.

Нормальные напряжения в произвольной точке с координатами z, y определяют суммой напряжений от моментов *Mz*, *My* (*в*)

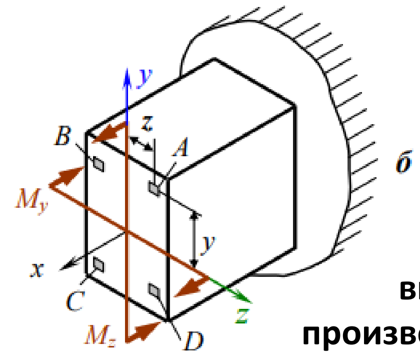
$$\sigma = \pm\sigma' \pm \sigma'' = \pm\frac{M_z \cdot y}{I_z} \pm \frac{M_y \cdot z}{I_y}$$

Напряжения при косом изгибе

Взаимное положение силовой плоскости и главных плоскостей инерции при косом изгибе (а)

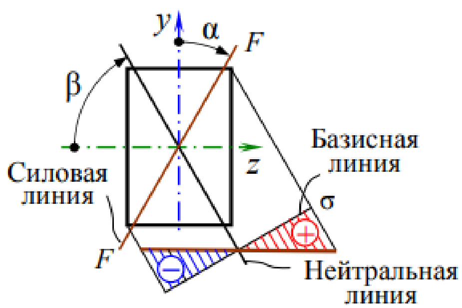


а



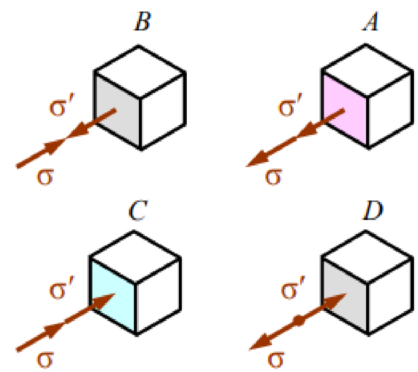
б

внутренние усилия в произвольном сечении бруса (б)



в

характер распределения напряжений в произвольном сечении бруса (в)



г

напряженное состояние в произвольных точках поперечного сечения бруса (г)

Из рисунка следует, что опасными являются точки, в которых складываются напряжения с одним знаком, то есть точки *A* и *C*:

$$\sigma = M\left(\frac{y \cdot \cos\alpha}{I_z} + \frac{z \cdot \sin\alpha}{I_y}\right).$$

РАСЧЕТ НА ПРОЧНОСТЬ ПРИ КОСОМ ИЗГИБЕ

Условие прочности

$$\sigma_{max} = \frac{M_{max}}{W_z}\left(\cos\alpha + \frac{W_z}{W_y}\sin\alpha\right) \le [\sigma]$$

Выполняют три вида расчетов:

- **поверочный;**
- **проектный;**
- **определение допускаемой нагрузки.**

Проектный расчет

Требуемый размер W_z поперечного сечения находят из условия прочности

$$\sigma_{max} = \frac{M_{max}}{W_z}\left(\cos\alpha + \frac{W_z}{W_y}\sin\alpha\right) \le [\sigma];$$

$$W_z \ge \frac{M_{max}}{[\sigma]}\left(\cos\alpha + \frac{W_z}{W_y}\sin\alpha\right).$$

Искомый параметр W_z находится по обе стороны от знака неравенства.

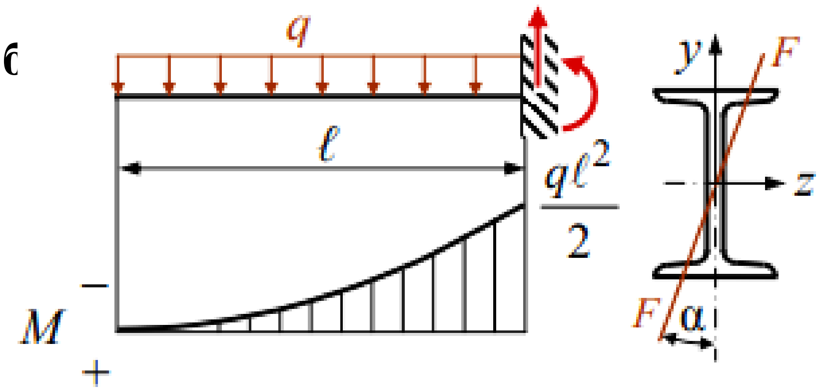
Полученное уравнение – трансцендентное. Такие уравнения решают методом итераций, то есть методом последовательных приближений.

Для стандартного прокатного профиля (двутавра, швеллера…) отношение $\frac{W_z}{W_y}$ зависит от размеров профиля.

Для двутавров от № 10 до № 60 отношение $\frac{W_z}{W_y}$ изменяется в диапазоне от 6,12 до 14,07. Поэтому в первом приближении принимают среднее число из указанного диапазона (например, 10). Подбирают профиль, а затем выполняют поверочный расчет. Следующая проба – уточненная. Перегрузку выше 5 % не допускают.

Пример 1.

Подобрать размер двутавра для консольной б нагруженной распределенной нагрузкой.



Дано: $q = 5$ кН/м; $\alpha = 10°$;
$\ell = 2$ м; $[\sigma] = 200$ МПа.

Решение. **Из условия прочности при косом изгибе**

$$\sigma_{\max} = \frac{M_{\max}}{W_z}\left(\cos\alpha + \frac{W_z}{W_y}\sin\alpha\right) \le [\sigma]$$

требуемый момент сопротивления

$$W_z \ge \frac{M_{\max}}{[\sigma]}\left(\cos\alpha + \frac{W_z}{W_y}\sin\alpha\right),$$

где $M_{\max} = q\ell^2/2 = 5\cdot 4/2 = 10$ кН·м;

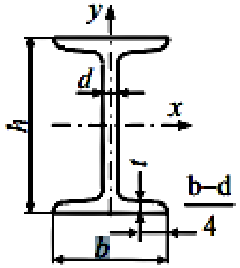
$$W_z \ge \frac{10\cdot 10^3}{200\cdot 10^6}(0{,}985 + 10\cdot 0{,}174) = 136\cdot 10^{-6}\,м^3.$$

Принимаем двутавр № 18: $W_z = 143$ см^3; $W_y = 18{,}4$ см^3.

Поверочный расчет: $\sigma_{\max} = \dfrac{10\cdot 10^3}{143\cdot 10^{-6}}\left(0{,}985 + \dfrac{143}{18{,}4}0{,}174\right) = 163$ МПа.

Недогрузка $\dfrac{200-163}{200}100 = 18{,}2\ \%$.

Принимаем двутавр № 16: $W_z = 109$ см^3; $W_y = 14{,}5$ см^3.



Двутавры стальные горячекатаные (ГОСТ 8239–89)

A – площадь поперечного сечения;
I – момент инерции;
W – момент сопротивления;
S – статический момент полусечения;
i – радиус инерции;

№	h, мм	b, мм	d, мм	t, мм	A, см^2	m, кг	I_x, см^4	W_x, см^3	i_x, см	S_x, см^3	I_y, см^4	W_y, см^3	i_y, см
10	100	55	4,5	7,2	12,0	9,46	198	39,7	4,06	23,0	17,9	6,49	1,22
12	120	64	4,8	7,3	14,7	11,5	350	58,4	4,88	33,7	27,9	8,72	1,38
14	140	73	4,9	7,5	17,4	13,7	572	81,7	5,73	46,8	41,9	11,5	1,55
16	160	81	5,0	7,8	20,2	15,9	873	109	6,57	62,3	58,6	14,5	1,70
18	180	90	5,1	8,1	23,4	18,4	1290	143	7,42	81,4	82,6	18,4	1,88
18а	180	100	5,1	8,3	25,4	19,3	1430	159	7,51	89,8	114	22,8	2,12
20	200	100	5,2	8,4	26,8	21,0	1840	184	8,28	104	115	23,1	2,07
20а	200	110	5,2	8,6	28,9	22,7	2030	203	8,37	114	155	28,2	2,32
22	220	110	5,4	8,7	30,6	24,0	2550	232	9,13	131	157	28,6	2,27
22а	220	120	5,4	8,9	32,8	25,8	2790	254	9,22	143	206	34,3	2,50
24	240	115	5,6	9,5	34,8	27,3	3460	289	9,97	163	198	34,5	2,37
24а	240	125	5,6	9,8	37,5	29,4	3800	317	10,1	178	260	41,6	2,63
27	270	125	6,0	9,8	40,2	31,5	5010	371	11,2	210	260	41,5	2,54
27а	270	135	6,0	10,2	43,2	33,9	5500	407	11,3	229	337	50,0	2,80
30	300	135	6,5	102	46,5	33,5	7080	472	12,3	268	337	49,9	2,69

Поверочный расчет: $\sigma_{max} = \frac{10 \cdot 10^3}{109 \cdot 10^{-6}}\left(0{,}985 + \frac{109}{14{,}5}0{,}174\right) = 210$ МПа.

Перегрузка $\frac{200-210}{200}100 = -5$ %. Такая перегрузка допустима.

Напряжения при плоском изгибе, то есть при $\alpha = 0$

$$\sigma_{\alpha=0} = \frac{M_{max}}{W_z} = \frac{10 \cdot 10^3}{109 \cdot 10^{-6}} = 91{,}7 \text{ МПа}.$$

Сопоставление напряжений при косом и плоском изгибах:

$$\frac{\sigma^{к}_{max}}{\sigma^{п}_{max}} = \frac{210}{91{,}7} = 2{,}29.$$

Вывод: **напряжения при косом изгибе больше, чем при плоском изгибе в 2,29 раз. Косой изгиб опаснее плоского.**

ИЗГИБ С РАСТЯЖЕНИЕМ

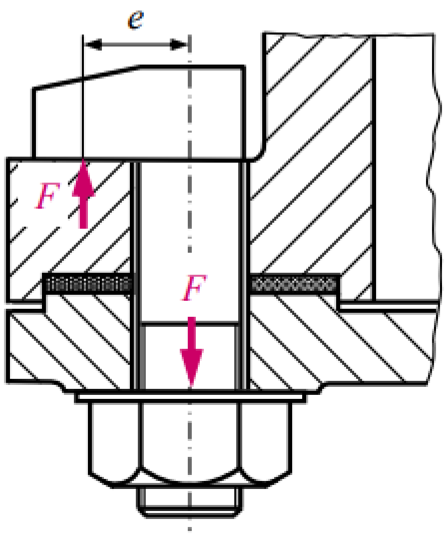
Изгиб с растяжением – частный случай сложного сопротивления, при котором на брус действуют продольные и поперечные нагрузки, пересекающие ось бруса

В общем случае в поперечных сечениях возникают пять внутренних усилий: действующие в двух плоскостях изгибающие моменты *Mz*, *My*, поперечные силы *Qz*, *Qy*, а также продольная сила *N*. Возникает сложный изгиб с растяжением или сжатием.

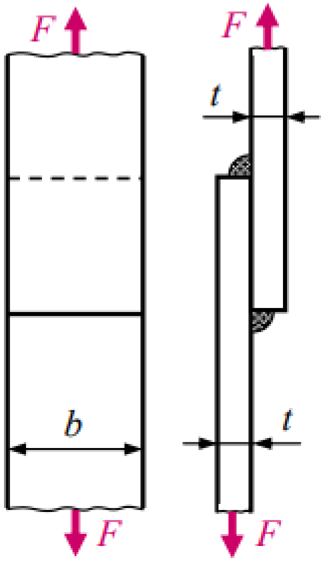
Пренебрегая касательными напряжениями от поперечных сил *Qz*, *Qy* (для длинных балок с отношением $\ell/h > 10$ их влияние незначительно), можно считать напряженное состояние в опасных точках линейным.

Внецентренное растяжение или сжатие

Внецентренное растяжение – частный случай изгиба с растяжением, при котором брус растягивается силами, параллельными оси бруса так, что их равнодействующая не совпадает с осью бруса, а проходит через точку *P*, называемую полюсом силы.



Болт-костыль



Сварное соединение

Примеры деталей и узлов, работающих при внецентренном нагружении

Внутренние усилия и напряжения

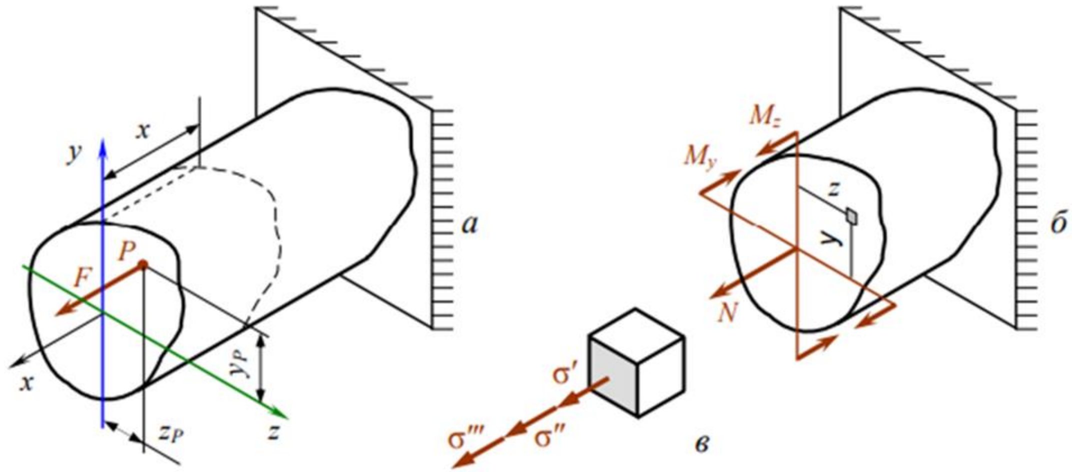
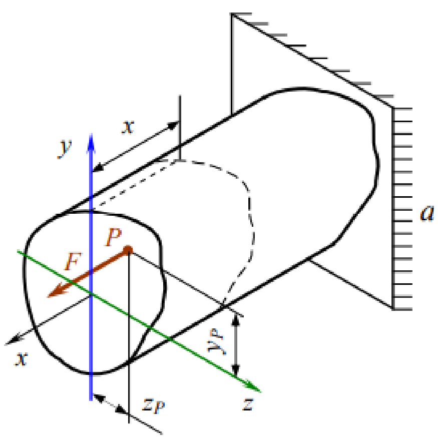


Схема к определению внутренних усилий и напряжений при внецентренном приложении силы

В произвольном сечении *x* бруса (*а*) методом сечений определяем внутренние усилия

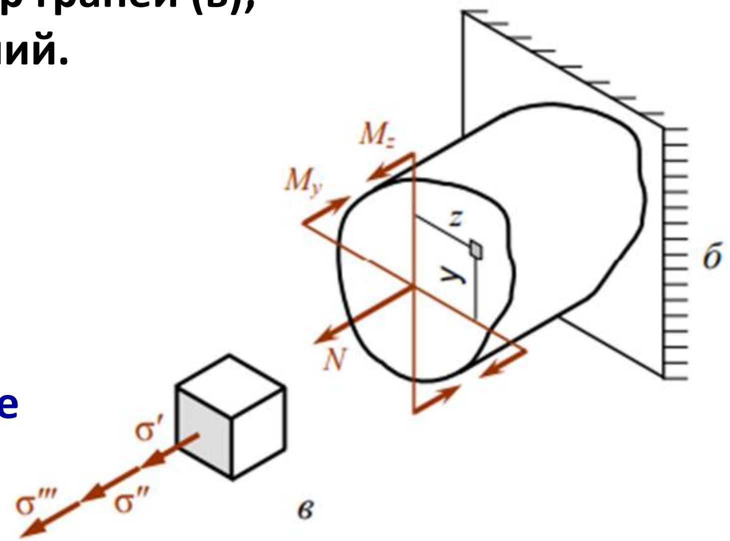


$$\sum x = 0; \qquad N = F; \qquad \sum M_x = 0; \qquad T = 0;$$

$$\sum y = 0; \qquad Q_y = 0; \qquad \sum M_y = 0; \qquad M_y = F \cdot z_P;$$

$$\sum z = 0; \qquad Q_z = 0; \qquad \sum M_z = 0; \qquad M_z = F \cdot y_P.$$

Отличны от нуля три внутренних усилия (б), от которых возникают нормальные напряжения, действующие по одной из трех пар граней (в); две другие пары граней свободны от напряжений.



Имеет место линейное напряженное состояние

Напряжения в произвольной точке являются суммой трех слагаемых

$$\sigma = \sigma' + \sigma'' + \sigma''' = \frac{N}{A} + \frac{M_z}{I_z} y + \frac{M_y}{I_y} z$$

Расчет на прочность при внецентренном нагружении

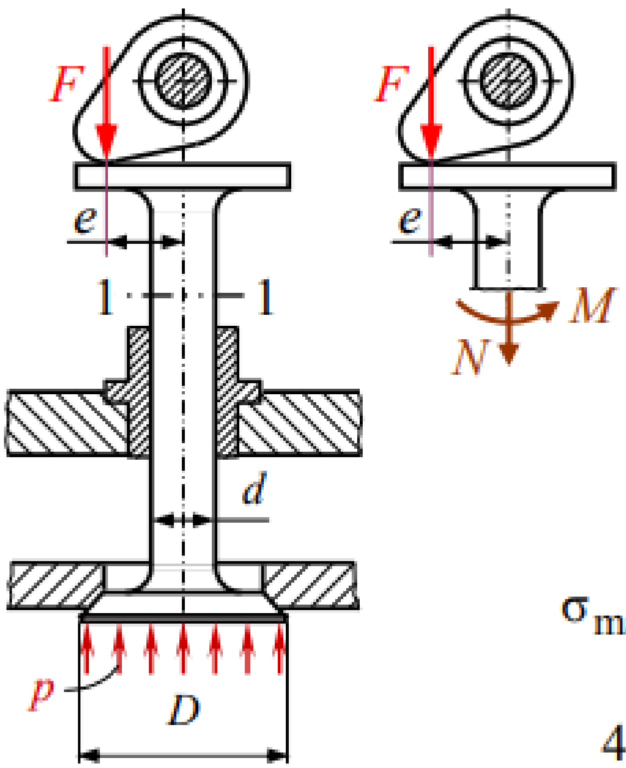
Поверочный расчет

$$\sigma = \frac{N}{A} \pm \frac{M_z}{W_z} \pm \frac{M_y}{W_y} \le [\sigma].$$

Пример 2.

Подобрать диаметр стержня выпускного клапана. При расчете использовать усилие *F* в момент открывания клапана в конце рабочего хода поршня.

Дано: $p = 1{,}5$ МПа; $e = 12$ мм;
$D = 35$ мм; $[\sigma] = 210$ МПа



Решение. Сила давления газов на тарелку клапана

$$F = p \cdot A_{клап} = p\frac{\pi}{4}D^2 = 1{,}5\frac{\pi}{4}35^2 = 1443 \text{ Н}.$$

Внутренние усилия в сечении 1-1 стержня клапана (по модулю):

$$N = F;\ M = F \cdot e.$$

Условие прочности:

$$\sigma_{max} = \frac{N}{A} + \frac{M}{W} \le [\sigma]; \quad \sigma_{max} = \frac{F \cdot 4}{\pi d^2} + \frac{F \cdot e \cdot 32}{\pi d^3} \le [\sigma].$$

$$\frac{4F}{\pi d^3}(d + 8e) \le [\sigma], \qquad \text{откуда} \quad d \ge \sqrt[3]{\frac{4F}{\pi[\sigma]}(d + 8e)}.$$

По обе стороны от знака неравенства искомый диаметр – имеем трансцендентное уравнение, которое решаем методом приближений:

$$d_0 = 0; \qquad d_1 \geq \sqrt[3]{\frac{4 \cdot 1443}{\pi \cdot 210}(0 + 8 \cdot 12)} = 9{,}435 \text{ мм}.$$

$$d_2 \geq \sqrt[3]{\frac{4 \cdot 1443}{\pi \cdot 210}(9{,}435 + 8 \cdot 12)} = 9{,}735 \text{ мм}.$$

$$d_3 \geq \sqrt[3]{\frac{4 \cdot 1443}{\pi \cdot 210}(9{,}735 + 8 \cdot 12)} = 9{,}744 \text{ мм}.$$

Разность между последним и предпоследним приближениями

$$\frac{9{,}744 - 9{,}735}{9{,}744}100 = 0{,}0924\ \%.$$

Процесс подбора прекращаем, принимаем $d = 10$ мм.

Проверка:

$$\sigma = \frac{F \cdot 4}{\pi d^2} + \frac{F \cdot e \cdot 32}{\pi d^3} = \frac{1443 \cdot 4}{\pi \cdot 100} + \frac{1443 \cdot 12 \cdot 32}{\pi \cdot 1000} = 18{,}4 + 176{,}4 = 194{,}8 \text{ МПа}$$

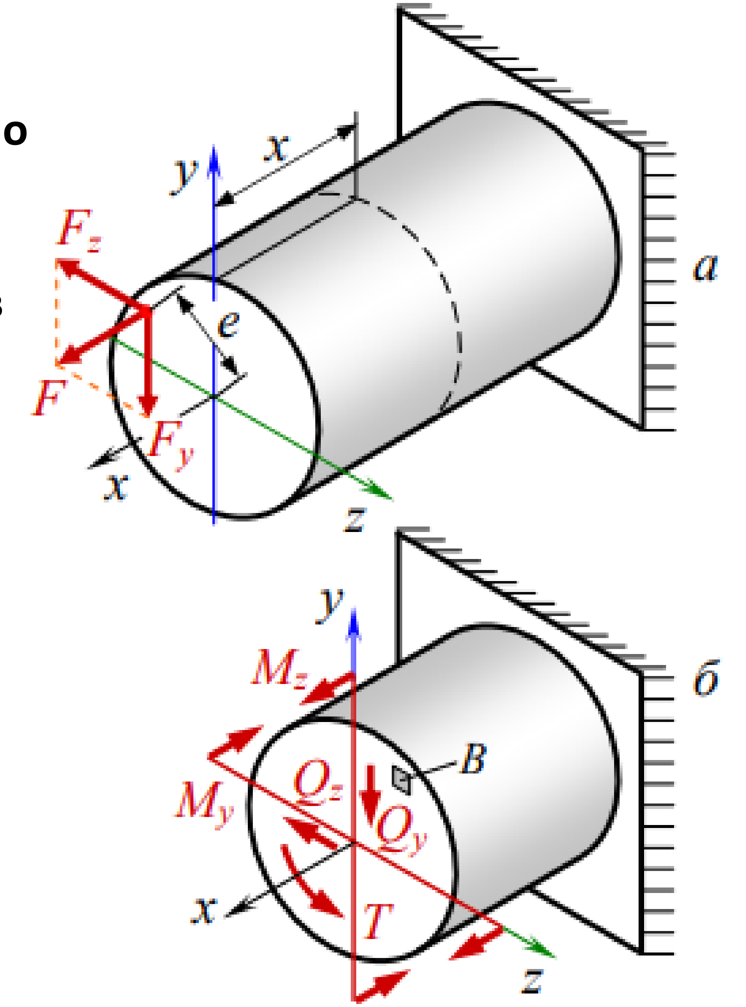
Напряжения изгиба больше напряжений растяжения в

$$\frac{\sigma_{\text{изг}}}{\sigma_{\text{раст}}} = \frac{176{,}4}{18{,}4} = 9{,}6 \text{ раза}.$$

ИЗГИБ С КРУЧЕНИЕМ

Изгиб с кручением – вид сложного сопротивления, при котором в поперечном сечении бруса возникают изгибающие и крутящий моменты

Рассмотрим случай, при котором внешние силы располагаются в плоскости поперечного сечения, но не пересекают геометрическую ось x (а).
Силу *F* разложим на ее составляющие Fz, Fy.
Методом сечений определим внутренние усилия в произвольном сечении x (б).



Определение внутренних усилий при изгибе с кручением

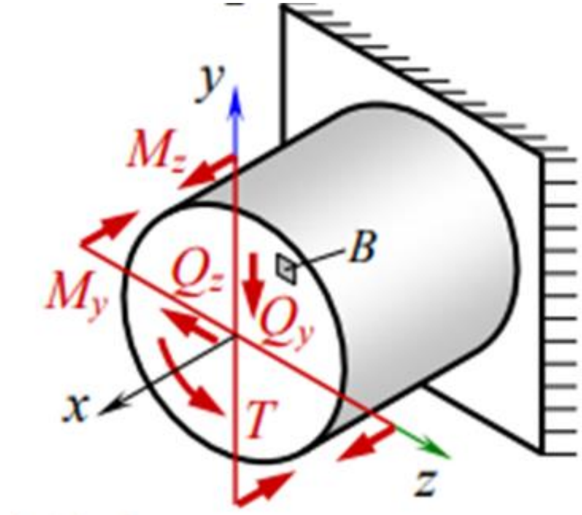
Спроецировав все силы на координатные оси и составив уравнения моментов относительно координатных осей, найдем внутренние усилия.
Из шести внутренних усилий не равно нулю пять.

$$\Sigma x = 0;\quad N = 0; \qquad \Sigma M_x = 0;\quad T = F \cdot e;$$

$$\Sigma y = 0;\quad Q_y = F_y; \qquad \Sigma M_y = 0;\quad M_y = F_z \cdot x;$$

$$\Sigma z = 0;\quad Q_z = F_z; \qquad \Sigma M_z = 0;\quad M_z = F_y \cdot x.$$

ИЗГИБ С КРУЧЕНИЕМ

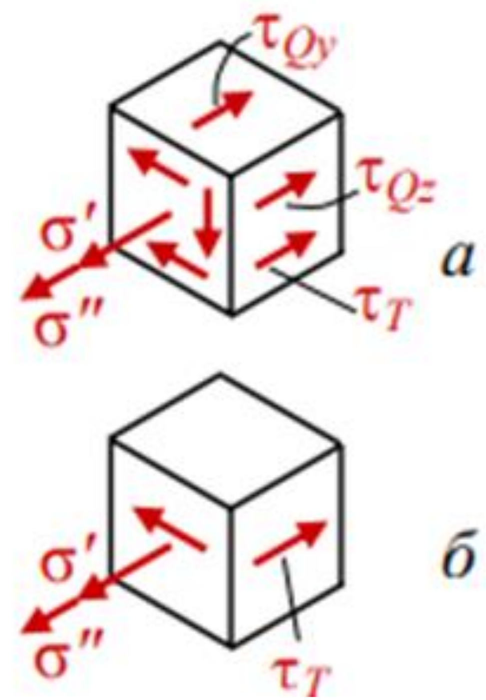


На выделенном элементе *B* показаны действующие по его граням напряжения.

От поперечных сил и крутящего момента возникают касательные напряжения τ_{Qy} τ_{Qz} τ_T.

От изгибающих моментов – нормальные напряжения σ′ и σ″. Для длинных валов и балок (*ℓ > 10 d*) влиянием поперечных сил часто пренебрегают.

Таким образом, учитывают только три момента: крутящий и два изгибающих. От них возникают три напряжения: одно касательное и два нормальных (б).



Анализ напряженного состояния

Расчет на прочность при изгибе с кручением

$$\sigma_{экв} = \frac{M_{прив}}{W_{ос}} \le [\sigma].$$

$M_{прив.}$ - приведенный момент, действие которого эквивалентно совместному действию M_y, M_z, T в соответствии с используемыми теориями прочности

По III теории прочности (наибольших касательных напряжений)

$$M_{прив,\,III} = \sqrt{M_y^2 + M_z^2 + T^2}.$$

По IV теории прочности (энергетической)

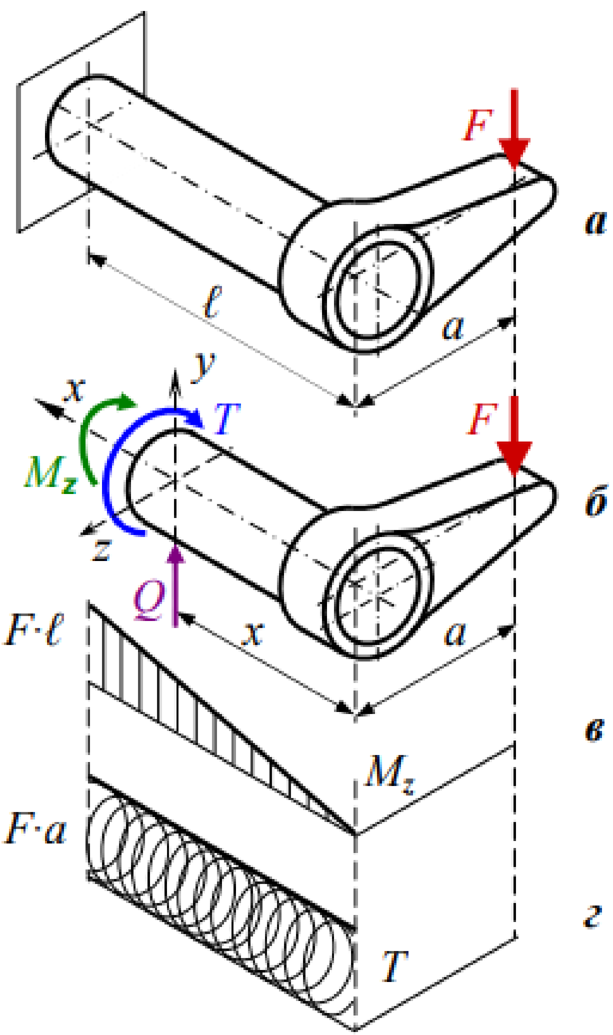
$$M_{прив,\,IV} = \sqrt{M_y^2 + M_z^2 + 0{,}75 \cdot T^2}.$$

Как при изгибе, так и при кручении круглого сечения опасными являются точки на периферии.

Для круга и кольца $W_z = W_y = W_{ос};\quad W_p = 2W_{ос}.$

Пример 3.

Вал с кривошипом подвергается действию силы F = 3,5 кН.
Определить диаметр вала по третьей теории прочности при [σ] = 160 МПа; ℓ = 50 см, а = 10 см.



Решение:

Внутренние усилия определяем методом сечений:
- рассекаем вал на две части в произвольном сечении x;
- отбрасываем одну из частей (б);
- заменяем действие отброшенной части внутренними усилиями и в координатной системе *xyz* составляем уравнения статики

$$\sum x = 0; \quad N = 0; \quad \sum M_x = 0; \quad T = -F \cdot a;$$
$$\sum y = 0; \quad Q_y = F; \quad \sum M_y = 0; \quad M_y = 0;$$
$$\sum z = 0; \quad Q_z = 0; \quad \sum M_z = 0; \quad M_z = -F \cdot x.$$

Строим эпюры изгибающего и крутящего моментов, действующих в поперечных сечениях вала (*в* и *г*).

Находим приведенный момент в опасном сечении – в защемлении:

$$M_{\text{прив}} = \sqrt{M_z^2 + T^2} = \sqrt{(-F\ell)^2 + (-Fa)^2} =$$
$$= F\sqrt{\ell^2 + a^2} = 3500\sqrt{0{,}5^2 + 0{,}1^2} = 1785\ \text{Н·м}.$$

Из условия прочности при изгибе с кручением $\sigma_{\text{экв}} = \dfrac{M_{\text{прив}}}{W_{\text{ос}}} \le [\sigma]$.

находим момент сопротивления $W_{\text{ос}} = \dfrac{M_{\text{прив}}}{[\sigma]} = \dfrac{\pi}{32} d^3$

откуда

$$d \ge \sqrt[3]{\frac{32 M_{\text{прив}}}{\pi[\sigma]}} = \sqrt[3]{\frac{32 \cdot 1785}{\pi \cdot 160 \cdot 10^6}} = 0{,}0484\ \text{м}$$

Округлив до большего значения, принимаем диаметр вала *d = 50 мм.*